7. INTEGRALES DE SUPERFICIE

7.5. Teorema de Gauss

Teorema de Gauss

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un recinto proyectable sobre los tres planos coordenados, y sea $\partial\Omega$ su frontera (superficie cerrada) orientada con $\mathbf{n}$ hacia afuera. Si $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$, entonces:

$$\iint_{\partial\Omega} F\, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz$$

donde, si $F = (P, Q, R)$, $\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

Ejemplos

1. Calcula la integral de $F(x, y, z) = (2x, y^2, z^2)$ sobre la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con la orientación hacia afuera.

2. Usa el teorema de Gauss para hallar la integral de superficie de la función escalar $f(x, y, z) = x^2 + y + z$ sobre la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3. Calcula la integral de $F(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ sobre la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ acotada por los plano $z = \pm 1$, e incluyendo los trozos de los planos cuando $x^2 + y^2 \leq 1$.

Ejercicios

1. Verifica el teorema de Gauss para $F(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $\Omega = [0, 1]^3$.

2. Calcula la integral de F sobre la frontera de Ω con vector $\mathbf{n}$ orientado hacia afuera, en los siguientes casos:

(a) $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$, y $\Omega = \big\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\big\}$.
(b) $F(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + z(x^2 + y^2)^2\mathbf{k}$, y $\Omega = \big\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\big\}$.
(c) $F(x, y, z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$, y $\Omega = \big\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 1,\ x \geq 0\big\}$.

3. Calcula $\iint_S \operatorname{rot} F\, d\sigma$, donde $F(x, y, z) = (2yz, 2 - x + 3y, x^2 + z)$ y S el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq 1$. ¿Que ocurre si se añaden las tapas al cilindro?

Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

1. Se calcula la integral F sobre la superficie y la integral triple de la divergencia de F sobre el recinto interior. En ambos casos, se obtiene el valor 3.
2. **(a)** $\frac{12\pi}{5}$; **(b)** $\frac{\pi}{3}$; **(c)** $\frac{4}{15}$.
3. $2a^2\pi$ y, si se añaden las tapas, 0.